4.2.8 Kvadratické rovnice IV

Předpoklady: 040207

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny nemůže běžný žák za 45 minut rozhodně stihnout. Do konce většinou nedorazí ani ti nejrychlejší. Předposlední příklad je tak spíš ukázkou toho, co může v budoucnosti ještě čekat. Snažím se postupovat tak, aby všichni stihli první příklad (maximálně bez bodu i)) a první dva body příkladu 2.

Pedagogická poznámka: Poslední příklad zadáváme na konci jako domácí práci na příští hodinu.

Pedagogická poznámka: Při zadávání prvního příkladu kladu důraz na slovo nejefektivněji a upozorňuji, že řešení některých bodů vzorcem takovým řešením rozhodně není. Ověřování výsledků takových bodů vzorcem po žácích nechci, je uvedeno pouze v učebnici pro případné šťouraly.

Př. 1: Vyřeš co nejefektivněji kvadratické rovnice.

a) $9x^2+16=0$	b) $x^2-7x+12=0$	c) $x^2+2x-1=0$
d) $3x^2-5x-12=0$	e) $x^2-5=0$	f) $x^2-3x-18=0$
g) $8x^2+18x-5=0$	h) $4x^2+9x=0$	i) $2,3x^2+7,1x+2,9=0$

a) $9x^2+16=0$ $\qquad K=\emptyset$

Zdůvodnění: Při dosazení libovolného čísla za x bude hodnota výrazu $9x^2$ nulová nebo větší než nula, po přičtení 16 se nemůže rovnat nule (argumentace „z druhé strany“: aby se hodnota levé strany rovnala nule, musel by výraz $9x^2$ vyjít –16, což nikdy nenastane).

Ověření pomocí vzorce: $a=9; b=0; c=16$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot9\cdot16}}{2\cdot9}=\frac{0\pm\sqrt{-576}}{18}\Rightarrow D<0\Rightarrow K=\emptyset$$

b) $x^2-7x+12=(x-4)(x-3)=0 \Rightarrow K=\{3;4\}$

Ověření pomocí vzorce: $a=1; b=-7; c=12$.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2}$$

$$x_1=\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4 \qquad x_2=\frac{7-1}{2}=\frac{6}{2}=3 \qquad K=\{3;4\}$$

c) $x^2+2x-1=0$

$a=1; b=2; c=-1$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4\cdot2}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{2\left(-1\pm\sqrt{2}\right)}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

$x_1 = 1+\sqrt{2}$ $\quad x_2 = 1-\sqrt{2}$ $\quad K = \left\{1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right\}$

d) $3x^2 - 5x - 12 = 0$
$a = 3; b = 5; c = -12$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 3\cdot(-12)}}{2\cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{5 \pm 13}{6}$$

$x_1 = \frac{5+13}{6} = \frac{18}{6} = 3$ $\quad x_2 = \frac{5-13}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$ $\quad K = \left\{-\frac{4}{3}; 3\right\}$

e) $x^2 - 5 = \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$
Ověření pomocí vzorce: $a = 1; b = 0; c = 5$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{\pm\sqrt{4}\sqrt{5}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{5}}{2} = \pm\sqrt{5}$$

$K = \left\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$

f) $x^2 - 3x - 18 = (x-6)(x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \{-3; 6\}$
Ověření pomocí vzorce: $a = 1; b = -3; c = -18$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 18}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$x_1 = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6$ $\quad x_2 = \frac{3-9}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ $\quad K = \{-3; 6\}$

g) $8x^2 + 18x - 5 = 0$
$a = 8; b = 18; c = -5$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot 8\cdot(-5)}}{2\cdot 8} = \frac{-18 \pm \sqrt{484}}{16} = \frac{-18 \pm 22}{16}$$

$x_1 = \frac{-18+22}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ $\quad x_2 = \frac{-18-22}{16} = \frac{-40}{16} = -\frac{5}{2}$ $\quad K = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right\}$

h) $4x^2 + 9x = x(4x+9) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \left\{-\frac{9}{4}; 0\right\}$
Ověření pomocí vzorce: $a = 4; b = 9; c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot 4\cdot 0}}{2\cdot 4} = \frac{-9 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-9 \pm 9}{8}$$

$x_1 = \frac{-9+9}{8} = \frac{0}{8} = 0$ $\quad x_2 = \frac{-9-9}{8} = \frac{-18}{8} = -\frac{9}{4}$ $\quad K = \left\{-\frac{9}{4}; 0\right\}$

i) $2{,}3x^2 + 7{,}1x + 2{,}9 = 0$
$a = 2{,}3; b = 7{,}1; c = 2{,}9$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-7,1\pm\sqrt{7,1^2-4\cdot 2,3\cdot 2,9}}{2\cdot 2,3}=\frac{-7,1\pm\sqrt{23,73}}{4,6}=\frac{-7,1\pm 4,871}{4,6}$

$x_1=\frac{-7,1+4,871}{4,6}=-0,48$ $\quad$ $x_1=\frac{-7,1-4,871}{4,6}=-2,60$ $\quad$ $K=\{-2,60;-0,48\}$

U některých rovnic není zpočátku jasné, zda jsou kvadratické. Musíme je proto nejdříve upravit.

Př. 2: Vyřeš rovnice.
a) $(x-2)^2=(2x+5)^2$ $\quad$ b) $(2x-3)^2-x(x-3)=(3x+1)(x-2)$
c) $(3y+1)(3y+11)=(y-3)(y+5)$

a) $(x-2)^2=(2x+5)^2$

$x^2-4x+4=4x^2+20x+25 \quad /-x^2+4x-4$

$0=3x^2+24x+21 \quad /:3$

$x^2+8x+7=0$

$(x+7)(x+1)=0 \quad\quad K=\{-7;-1\}$

b) $(2x-3)^2-x(x-3)=(3x+1)(x-2)$

$4x^2-12x+9-x^2+3x=3x^2-6x+x-2$

$3x^2-9x+9=3x^2-5x-2 \quad /-3x^2+5x+2$

$-4x+11=0 \quad /+4x$ $\quad$ Lineární rovnice $\Rightarrow$ nepotřebujeme vzorec pro kvadratickou rovnici, řešíme klasicky vyjádřením *x*.

$11=4x \quad /:4$

$x=\frac{11}{4} \quad\quad K=\left\{\frac{11}{4}\right\}$

c) $(3y+1)(3y+11)=(y-3)(y+5)$

$9y^2+33y+3y+11=y^2+5y-3y-15$

$9y^2+36y+11=y^2+2y-15 \quad /-y^2-2y+15$

$8y^2+34y+26=0 \quad /:2$

$4y^2+17y+13=0$

$a=4;\ b=17;\ c=13$

$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 4\cdot 13}}{2\cdot 4}=\frac{-17\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{-17\pm 9}{8}$

$y_1=\frac{-17+9}{8}=\frac{-8}{8}=-1$ $\quad$ $y_2=\frac{-17-9}{8}=\frac{-26}{8}=-\frac{13}{4}$ $\quad$ $K=\left\{-\frac{13}{4};-1\right\}$

Pedagogická poznámka: Největší problémy jsou s umocňováním závorek a znamínky před nimi. V bodě b) se pak stává, že žáci poté, co zjistí, že z rovnice zmizel kvadratický člen, prohlásí rovnici za neřešitelnou.

Př. 3: Vyřeš rovnice.

a) $\frac{3y+5}{y+1}-\frac{3}{y}=1$

b) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}=\frac{3x-2}{x^2-2x}$

c) $\frac{2b+1}{4b-6}+\frac{2b+5}{4b-2}=2$

d) $\frac{2a-7}{3a}-\frac{2a+2}{a(a-1)}=\frac{-2a-1}{a^2-a}$

a) $\frac{3y+5}{y+1}-\frac{3}{y}=1 \quad / \cdot (y+1)y$ Podmínky: $y \neq 0;\ y \neq -1$.

$y(3y+5)-3(y+1)=y(y+1)$

$3y^2+5y-3y-3=y^2+y$

$3y^2+2y-3=y^2+y \quad / -y^2-y$

$2y^2+y-3=0$

$a=2; b=1; c=-3$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-1\pm5}{4}$$

$y_1=\frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1 \qquad y_2=\frac{-1-5}{4}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$

Oba nalezené kořeny vyhovují podmínkám $\Rightarrow$ $K=\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$.

b) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}=\frac{3x-2}{x^2-2x} \quad / \cdot (x-2)x$ Podmínky: $x \neq 0;\ x \neq 2$.

$x^2+3(x-2)=3x-2$

$x^2+3x-6=3x-2 \quad / -3x+2$

$x^2-4=0$

$(x-2)(x+2)=0 \qquad x_1=2 \qquad x_2=-2$

První kořen nevyhovuje podmínkám $\Rightarrow$ $K=\{-2\}$.

c) $\frac{2b+1}{4b-6}+\frac{2b+5}{4b-2}=2$ Podmínky: $4b-6\neq0 \Rightarrow a\neq\frac{3}{2},\ 4b-2\neq0\Rightarrow b\neq\frac{1}{2}$

$\frac{2b+1}{4b-6}+\frac{2b+5}{4b-2}=2 \quad / \cdot 2$

$\frac{2b+1}{2b-3}+\frac{2b+5}{2b-1}=4 \quad / \cdot (2b-3)(2b-1)$

$(2b+1)(2b-1)+(2b+5)(2b-3)=4(2b-3)(2b-1)$

$4b^2-1+4b^2-6b+10b-15=4(4b^2-2b-6b+3)$

$8b^2+4b-16=16b^2-32b+12 \quad / -8b^2-4b+16$

$0 = 8b^2 - 36b + 28 \quad / : 4$

$2b^2 - 9b + 7 = 0$

$a = 2;\ b = -9;\ c = 7$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{9 \pm 5}{4}$$

$b_1 = \frac{9+5}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ $\qquad$ $b_2 = \frac{9-5}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Oba nalezené kořeny vyhovují podmínkám $\Rightarrow\ K = \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$.

d) $\frac{2a-7}{3a} - \frac{2a+2}{a(a-1)} = \frac{-2a-1}{a^2-a}$

$\frac{2a-7}{3a} - \frac{2a+2}{a(a-1)} = \frac{-2a-1}{a(a-1)} \quad / \cdot 3a(a-1)$ $\qquad$ Podmínky: $a \neq 0; 1$

$(2a-7)(a-1) - 3(2a+2) = 3(-2a-1)$

$2a^2 - 2a - 7a + 7 - 6a - 6 = -6a - 3$

$2a^2 - 15a + 1 = -6a - 3 \quad / +6a + 3$

$2a^2 - 9a + 4 = 0$

$a = 2;\ b = -9;\ c = 4$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$$

$a_1 = \frac{9+7}{4} = \frac{16}{4} = 4$ $\qquad$ $a_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Oba nalezené kořeny vyhovují podmínkám $\Rightarrow\ K = \left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$.

Př. 4: Vyřeš šílenosti.

a) $(x+1)^2 - \left[5(x+1) - (x+3)(x+1) + 3\right] = (x+4)(3x+2)$

b) $3(x+1) + 6(x+2)x - 5(2x+3) = 2(x+1)(2x+1) - 2(4x+7)$

a) $(x+1)^2 - \left[5(x+1) - (x+3)(x+1) + 3\right] = (x+4)(3x+2)$

$x^2 + 2x + 1 - \left[5x + 5 - \left(x^2 + x + 3x + 3\right) + 3\right] = 3x^2 + 2x + 12x + 8$

$x^2 + 2x + 1 - \left[5x + 5 - \left(x^2 + 4x + 3\right) + 3\right] = 3x^2 + 14x + 8$

$x^2 + 2x + 1 - \left(5x + 5 - x^2 - 4x - 3 + 3\right) = 3x^2 + 14x + 8$

$x^2 + 2x + 1 - \left(-x^2 + x + 5\right) = 3x^2 + 14x + 8$

$x^2 + 2x + 1 + x^2 - x - 5 = 3x^2 + 14x + 8$

$2x^2 + x - 4 = 3x^2 + 14x + 8 \quad / -2x^2 - x + 4$

$0 = x^2 + 13x + 12 = (x+12)(x+1)$ $K = \{-12; -1\}$

b) $3(x+1) + 6(x+2)x - 5(2x+3) = 2(x+1)(2x+1) - 2(4x+7)$

$3x + 3 + 6x^2 + 12x - 10x - 15 = 2(2x^2 + x + 2x + 1) - 8x - 14$

$6x^2 + 5x - 12 = 4x^2 + 6x + 2 - 8x - 14$

$6x^2 + 5x - 12 = 4x^2 - 2x - 12 \quad / -4x^2 + 2x + 12$

$2x^2 + 7x = 0$

$x(2x+7) = 0$ $K = \left\{-\frac{7}{2}; 0\right\}$

Př. 5: Zrekapituluj a uspořádej naše zkušenosti s řešením rovnic. Jaké typy rovnic umíme řešit? Jaké typy výsledků můžeme získat? Jak máme v různých situacích postupovat? Na co si musíme dávat pozor?

Řešení na začátku následující hodiny.

Shrnutí: Ne každá rovnice, která na začátku obsahuje x^2, je nutně kvadratická. Lineární rovnice řešíme tím, že členy s neznámou převedeme na jednu stranu, členy bez neznámé na druhou.